Séries de Fourier

I – Coefficients de Fourier :

Définition :
On note $C_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions de R dans C continues 2π-périodiques.
Cet ensemble est un sous-espace vectoriel de C(R,C).

On munit cet espace vectoriel du produit scalaire défini par : $(f \mid g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(x)}.g(x).dx$.

Ainsi $C_{2\pi}$ est un espace préhilbertien complexe.
De plus, on peut définir 3 normes sur $C_{2\pi}$:

1°) Norme de la convergence en moyenne quadratique : $\| f \|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2.dx}$

2°) Norme de la convergence en moyenne : $\| f \|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|.dx$

3°) Norme uniforme : $\| f \|_\infty = \sup_{x\in R} |f(x)|$

Définition :
On appelle E l'ensemble des fonctions de R dans C continues par morceaux et 2π-périodiques.
On démontre que E est un espace vectoriel.

Remarque :
De même que pour les fonctions continues, on montre que toute fonction continue par morceaux de R dans C et périodique est bornée.

Propriété :
On pose pour tout n dans Z la famille (e_n) des fonctions de R dans C qui à x associent e^{inx}.
La famille (e_n) est une famille orthonormale de $C_{2\pi}$.

Définition :
Soit f une fonction de R dans C continue par morceaux et 2π-périodique. On appelle coefficients de Fourier exponentiels de f les nombres définis par : $\forall n \in Z$, $c_n(f) = (e_n \mid f)$.

Ainsi, $\forall n \in Z$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x).e^{-inx}.dx$

Remarque :

La fonction $x \mapsto f(x).e^{-inx}$ étant 2π-périodique, on a : $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x).e^{-inx}.dx$ ($\alpha \in$ R donné)

Remarque :

$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x).dx$ = valeur moyenne de f.

Définition :
Soit f une fonction de R dans C continue par morceaux et 2π-périodique. On appelle coefficients de Fourier trigonométriques de f les nombres définis par :

$\forall n \in N$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x).\cos(nx).dx$ et $\forall n \in N^*$, $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x).\sin(nx).dx$

Remarque :
$b_0(f)$, si on le définissait, serait égal à 0.
$a_0(f)$ = 2 x valeur moyenne de f.

Remarque : (Propriétés relatives à la parité de f)
1°) Si f est paire, $\forall n \in N^*$ ($x \mapsto f(x).\sin nx$) est une fontion impaire donc les b_n sont nuls.
2°) Si f est impaire, $\forall n \in N$ ($x \mapsto f(x).\cos nx$) est une fontion impaire donc les a_n sont nuls.

Lemme : (Assez technique)
$\forall n \in N^*$, $c_n(f) = [a_n(f) - i.b_n(f)]/2$ et $c_{-n}(f) = [a_n(f) + i.b_n(f)]/2$ et $c_0 = a_0(f)/2$

Propriété :
Soit f une fonction de R dans C 2π-périodique, continue et de classe C^1 par morceaux.

Alors, $\forall n \in Z$, $c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x).e^{-inx}.dx = i.n.c_n(f)$ (par intégration par parties)

Remarque :
On peut avoir des relations similaires pour les coefficients de Fourier trigonométriques.

Généralisation :
Soit f une fonction de R dans C 2π-périodique, de classe C^{k-1} et C^k par morceaux avec $k \in N$.
Alors : $\forall n \in Z$, $c_n(f^{(k)}) = (i.n)^k c_n(f)$. (par récurrence)

Définition :
Soit f une fonction de R dans C 2π-périodique et continue par morceaux. On appelle sommes partielles de la série de Fourier de f les fonctions $S_n(f)$ définies par :

$\forall n \in N$, $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f).e_k = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f).e^{i.k.x}$

Propriété :
La somme de la série de Fourier de f s'écrit avec les coefficients trigonométriques :

$\forall n \in N$, $S_n(f) = \frac{1}{2}.a_0(f) + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k.\cos(k.x) + b_k.\sin(k.x)\right)$

II – Convergence en moyenne quadratique :

Propriété : (Théorème de convergence en moyenne quadratique)
Soit f une fonction de R dans C 2π-périodique et continue par morceaux.
Alors la suite de fonctions $(S_n(f))$ converge en moyenne quadratique vers f : $\lim_{n\to+\infty} \|f - S_n(f)\|_2 = 0$

Propriété : (Formule de Parseval)
Si f une fonction de R dans C est 2π-périodique et continue par morceaux, alors :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}.\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} |f(x)|^2.dx = \|f\|_2{}^2$$

Propriété : (Formule de Parseval bis)
Si f une fonction de R dans C est 2π-périodique et continue par morceaux, alors :

$$\frac{1}{2}|a_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right) = \frac{1}{\pi}.\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} |f(x)|^2.dx$$

Propriété : (Expression du produit scalaire)
Si f et g deux fonctions de R dans C sont 2π-périodiques et continues par morceaux, alors :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n(f)}.c_n(g) = (f|g)$$

Propriété :
Si f une fontion de R dans C est 2π-périodique et continue par morceaux, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} c_n(f) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} c_{-n}(f) = 0$$

Remarque :
On démontre de même que : $\lim_{n\to+\infty} a_n(f) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n(f) = 0$

Corollaire :
Si f une fonction de R dans C est 2π-périodique, de classe C^{k-1} et C^k par morceaux, avec $k \in \mathbb{N}^*$ donné, alors : $c_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ et $c_{-n}(f) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^k}\right)$

Propriété : (Unicité du développement en série de Fourier)
Si f et g deux fonctions de R dans C sont 2π-périodiques et continues et si $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = c_n(g)$.
Alors f = g.

III – Convergence ponctuelle :

Propriété :
Si f fonction de R dans C est 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux.
Alors, la série de Fourier de f converge simplement sur R. De plus, sa somme S (f) (x) est égale à :

- f (x) si f est continue au point x
- $\frac{1}{2}.\lim_{h\to0+}\left(f(x+h) + f(x-h)\right)$ sinon (cf Théorème de Dirichlet)

Remarque :
Pour développer une fonction 2π-périodique en série de Fourier, il faut que cette fonction soit au minimum de classe C^1 par morceaux.

Propriété : (Théorème de Convergence normale)
Soit f de R dans C 2π-périodique. Si f est continue et de classe C^1 par morceaux, alors :

1°) $\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|$ est la somme partielle d'une série convergente.

2°) La série de Fourier de f converge normalement donc uniformément sur R.
De plus, sa somme est égale à f.

© Archi 2002
http://www.prepasciences.com